KUYRUK SİSTEMLERİ (BEKLEME HATTI MODELLERİ)

TEK KANALLI (TEK SERVİSLİ) KUYRUK MODELLERİ

a) Üstel Servisli- Sınırsız Kuyruk Modeli: $(\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{1}) : (\mathbf{FCFS} / \infty / \infty)$

Bu modelde,

- Tek bir servis kanalı olduğu
- Müşterilerin sisteme geliş süreçlerinin Poisson dağılımı gösterdiği
- Servis süreçlerinin Üstel dağılıma sahip olduğu
- Kuyrukta bekleyenlerden ilk gelenin ilk hizmet gördüğü
- Kuyruk uzunluğunda bir sınırlama olmadığı
- Ortalama servis oranının, müşterilerin ortalama geliş oranından büyük olduğu $(\mu > \lambda)$ yani $\rho < 1$ olduğu varsayılmaktadır.

Bu model için aşağıdaki formüller kullanılmaktadır:

n : Sistemdeki müşteri sayısı olmak üzere,

Sistemde n müşteri bulunma olasılığı: $P_n = (1-\rho)\rho^n$

Servis verenin aylak kalma süresinin oranı: $P_0 = 1 - \rho$

Sistemde n veya daha fazla müşterinin bulunma oranı: $P_n = \rho^n$

Sistemdeki[servis gören ve kuyrukta bekleyen] ortalama(beklenen) müşteri sayısı:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Ortalama kuyruk uzunluğu[servis görmek üzere bekleyen müşteri sayısı]:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Müşterinin kuyrukta harcadığı ortalama zaman:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Kuyruk sisteminde müşterilerin harcadığı ortalama zaman:

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{L}{\lambda}$$

Sistem kullanım faktörü[Sistemin yani hizmet verenin meşgul olma olasılığı]:

$$\rho = \frac{c\lambda}{\mu}$$

Müşterinin sistemde t birim zamanından daha fazla zaman harcama olasılığı:

$$W(t) = e^{-t/W} \quad , \qquad t > 0$$

Müşterilerin kuyrukta t birim zamanından daha fazla süreyi harcamalarının olasılığı:

$$W_q(t) = \rho e^{-t/W} \quad , \qquad t > 0$$

Örnek: Bir fabrikada bozulan makinaların onarımı için geliş oranları 12 dakikada 1 makina, onarım oranı ise 8 dakikada 1 makinadır.

a) Onarım için sistemde bekleyen makine sayısını bulunuz.
b) Bir makinanın kuyrukta bekleme süresini bulunuz.

Çözüm: $\lambda = \frac{1}{12}\ makina/dk$ ve $\mu = \frac{1}{8}\ makina/dk$ verilmiş.

a) $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \quad , \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/12}{1/8} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ olup

$L = \frac{2/3}{1-2/3} = 2\,makina$ bulunur.

b) $W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ olup $W_q = \frac{2/3}{\frac{1}{8}-\frac{1}{12}} = 16\,dakika$ bulunur.

Örnek: Bir mağazada saatte ortalama 12 müşteri ödeme yapmak için kasaya gelmektedir. Ödeme, kişi başına ortalama 4 dakikalık zaman almaktadır. Buna göre şıklarda istenenleri hesaplayınız.

a) Kullanım faktörü
b) Kasiyerin aylak kalma olasılığı
c) Sistemdeki ortalama müşteri sayısı
d) Kuyruktaki ortalama müşteri sayısı
e) Müşterinin kuyrukta bekleme süresi
f) Sistemde müşterinin harcadığı ortalama zaman

Çözüm: Geliş oranı: $\lambda = 12\ müşteri/saat$ ve Servis oranı: $\mu = \frac{1}{4}\ müşteri/dk$ verilmiş.

Zaman dilimi aynı olmalıdır. Onun için,

$$\lambda = 12\,müşteri/saat = 0.2\,müşteri/dk$$

$\mu = \frac{1}{4}\, müşteri/dk \;\; = 15\, müşteri/saat$ dönüşümleri yapılır.

a) Kullanım faktörü (Sistemin yani hizmet verenin meşgul olma olasılığı)

$$\rho = \frac{c\lambda}{\mu} = \frac{1x12}{15} = 0.8$$

Kasiyerin meşgul olma olasılığı %80 dir.

b) Kasiyerin aylak kalma olasılığı

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - (0.8) = 0.2$$

Kasiyerin boş(aylak) kalma olasılığı %20 dir.

c) Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.8}{1-(0.2)} = 4\;\; müşteri \;\;, \; [\, L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{12}{15-12} = 4\, müşteri\,, \; \frac{0.2}{(0.25)-(0.2)} = 4 \,]$$

d) Kuyruktaki ortalama müşteri sayısı (Ortalama kuyruk uzunluğu)

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0.8)^2}{1-(0.8)} = 3.2\;\; müşteri \;\;, \; [\, L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{12^2}{15(15-12)} = 3.2\;\; müşteri \;\;]$$

e) Müşterinin kuyrukta bekleme süresi (Müşterinin kuyrukta harcadığı ortalama zaman)

$$W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{0.8}{15-12} = 0.266\, saat \;\;\;, \; [\, W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{12}{15(15-12)} = 0.266\, saat \;\;]$$

f) Sistemde müşterinin harcadığı ortalama zaman

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{15-12} = 0.333\, saat \;\;\;, \; [\;\, W = \frac{L}{\lambda} = \frac{4}{12} = 0.333\, saat \;\;\;]$$

Örnek: Bir hastanede göz doktoruna muayene için gelen hastaların ortalama geliş oranı saatte 8 kişidir. Muayene, ilk gelene ilk servis kuralına göre yapılmaktadır ve hastaların gelişleri Poisson dağılımlıdır. Doktorun bir hastayı muayene etme süresi 6 dakikadır.

a) Muayene salonundaki ortalama hasta sayısını
b) Hastaların hastanede harcadıkları ortalama zamanı
c) Doktorun boş kalma olasılığını
d) Hastaların 20 dakikadan daha fazla doktoru bekleme olasılığını
e) Hastaların kuyrukta bekleme süresini

bulunuz.

Çözüm:

$\lambda = 8\; hasta/saat$

$\mu = \frac{1}{6}\; hasta/dk \;\; = 10\; hasta/saat$ verilmiş.

a) $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = 0.8$ olup $L = \frac{0.8}{1-(0.8)} = 4\;\; hasta$ bulunur.

b) $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{10-8} = 0.5\; saat$

c) $P_0 = 1-\rho = 1-(0.8) = 0.2$

d) (Doktor meşguldür. Hastalar kuyrukta bekliyor.) (Muayenede bekliyor deseydi W(t) olacaktı)

$W_q(t) = \rho e^{-t/W}$, $t > 0$, $t = 20\; dakika = 1/3\; saat$

$W_q(t) = (0.8)e^{-\frac{\frac{1}{3}}{0.5}} = (0.8)e^{-\frac{2}{3}} = 0.41$

e) $W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{0.8}{10-8} = 0.4\; saat$

Örnek: Beslen ekmek fabrikasına müşterilerin gelişleri Poisson dağılımına göredir ve saatte 42 kişidir. Fırındaki satış personeli saatte ortalama 60 kişiye hizmet verebilmektedir. Fırın günde 10 saat çalışmakta ve ekmekleri satan kişiye saatte 80 pb ödemektedir. Müşterilerin, beklemekten dolayı maliyetlerinin saatte 1000 pb olduğu kabul edilmektedir.

Yönetici satışların daha hızlı yürütülmesi için ek self-servis sistemi kurarak, bir saatlik servis oranını 80 kişiye çıkarmak istemektedir. Ek sistemin işletmede yerleştirilmesi, günlük maliyeti 2000 pb artıracaktır. Buna göre,

a) Fırındaki müşterilerin ortalama sayısını
b) Müşterilerin fırında harcadıkları ortalama zamanı
c) Kuyruktaki müşterilerin ortalama sayısını
d) Kuyruktaki müşterilerin harcadığı ortalama zamanı
e) Self-servis sistemi yerleştirilmeden önceki toplam günlük maliyeti
f) Self-servis sisteminin işletmenin gelirinde ne kadarlık bir artma sağlayacağını bulunuz.

Çözüm:

$\lambda = 42\; müşteri/saat$, $\mu = 60\; müşteri/saat$ verilmiş.

a) $L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{42}{60-12} = 2.3\; müşteri$

b) $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{60-42} = \frac{1}{18}\; saat$

c) $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{42^2}{60(60-42)} = 1.6\;\; müşteri$

d) $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{42}{60(60-42)} = 0.038\; saat$

e) Satıcı personelin günlük maliyeti: 10x80 = **800 pb**

Bir müşterinin bekleme maliyeti: (1/18)x1000 = 55.55 pb/saat olup fırına saatte 42 kişi geliyor ve 10 saat çalışılıyor. 10 saatte 420 müşteri gelir.

Günlük müşterilerin bekleme maliyeti: 420x(55.55) = **23331 pb**

Toplam günlük maliyet = Kuyruk maliyeti+Satıcı personel maliyeti= 23331 + 800= **24131 pb** bulunur.

f) Self-servis sistemi kurulursa; $\mu = 80\ müşteri/saat$ olacaktır.

Müşterilerin fırında harcayacakları süre: $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{80-42} = \frac{1}{38}\ saat$

Günlük kuyruk maliyeti = (1/38)x1000x420 = **11053 pb** olur.

Toplam günlük maliyet =Kuyruk maliyeti + Satıcı personel maliyeti + Self servis sistemi

Yerleştirme maliyeti

Toplam günlük maliyet = 11053 + 800 + 2000 = **13853 pb**

Gelirdeki artış = 24131 - 13853 = 10278 pb. olur. (Self-servis kurulmadan önceki günlük maliyet – Self-servis kurulduktan sonraki günlük maliyet)

b) Sonlu Geliş Kaynaklı- Sonsuz Tek Kanallı Kuyruk Modeli:

Bu modelde,

- Hizmet için gelen müşterilerin sayısı kısıtlanır. Belirli bir zamanda ancak N sayıda müşteri hizmet için kuyruk sistemine gelir ve kuyruk uzunluğu N-1 'den büyük olamaz. Yani sınırlı(sonlu) bir kuyruk vardır.
- Müşteri gelişlerinin Poisson dağılımına uyduğu varsayılır.
- Müşterilere servis verme süresinin Üstel dağılımlı olduğu varsayılır.

c) Sonsuz Geliş Kaynaklı Tek Kanallı Kuyruk Modeli (Sınırlandırılmış Kuyruk Modeli):

Bu modelde,

- Sistem ancak M sayıda müşteriye hizmet verebilmektedir.
- Kuyrukta bekleyen müşterilerin sayısı sonlu olup M-1 'den fazla olamaz.
- Kuyruk sistemine ek müşteri geldiğinde kuyruk dolu ise hizmet görmeden sistemi terk etmelidir.
- $\rho < 1$ olma şartı yoktur.
- Gelişler Poisson, servis Üstel dağılımlıdır.

Kullanılan formüller aşağıda verilmiştir:

Etkin Geliş oranı:

$$\lambda_e = \lambda(1 - P_M) \quad , \quad P_M = P_0 \rho^M\text{: Sistemin dolu olma olasılığı}$$

Etkin trafik yoğunluğu:

$$\rho_e = \frac{\lambda_e}{\mu} = \frac{\lambda(1 - P_M)}{\mu} = \rho(1 - P_M)$$

Sistemde müşteri olmama olasılığı:

$$P_0 = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{M+1}} = \frac{1 - \rho}{1 - (\rho)^{M+1}} \quad , \quad \lambda \neq \mu \ \ veya \ \ \rho \neq 1$$

$$\boldsymbol{P_0 = \frac{1}{M + 1} = \quad , \quad \rho = 1}$$

Sistemde n sayıda müşteri bulunma olasılığı:

$$P_n = (\lambda/\mu)^n P_0 = \rho^n P_0 \quad ; \quad 0 \leq n \leq M \quad , \lambda \neq \mu \ \ veya \ \ \rho \neq 1$$

$$P_n = \frac{1}{M + 1} = \quad , \quad \rho = 1$$

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı:

$$L = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} - \frac{(M + 1)(\lambda/\mu)^{M+1}}{1 - (\lambda/\mu)^{M+1}} \quad , \quad \lambda \neq \mu$$

$$L = \frac{M}{2} \quad , \quad \lambda = \mu \ \ yada \ \rho = 1$$

Kuyruk uzunluğu:

$$L_q = L - (1 - P_0) = L - \rho_e$$

Müşterilerin kuyrukta ortalama bekleme süresi:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1 - \rho^M P_0)} = \frac{L_q}{\lambda(1 - P_M)} = \frac{L_q}{\lambda_e}$$

Müşterilerin sistemde harcadıkları ortalama süre:

$$W = \frac{L}{\lambda(1 - \rho^M P_0)} = \frac{L}{\lambda(1 - P_M)} = \frac{L}{\lambda_e} = W_q + \frac{1}{\mu} \quad , \quad \lambda \neq \mu$$

$$W = \frac{1}{\mu}\left(\frac{M + 1}{2}\right) \quad , \quad \lambda = \mu$$

M: Kuyruk sistemindeki en fazla müşteri sayısıdır.

Örnek: Bir yıkama servisi, arabaların yıkanmaya alınmadan önce park edebileceği yerlerin sayısını belirlemek istemektedir. Bir arabanın yıkanması ortalama 10 dakika alır ve üstel bir dağılım izler. Müşterilerin ortalama her 12 dakikada rastgele yıkama servisine gelecekleri düşünülür. Park yeri yoksa müşteriler arabalarını bir başka yere alacaklardır. Araba yıkanırken park yerini işgal etmediği varsayılarak,

a) Aşağıda sağlanan park yerlerine göre kaybedebileceği beklenen müşterilerin yüzdesini bulunuz.
   i) Sıfır sayıda park yeri
   ii) İki park yeri
   iii) Dört park yeri
b) Üç park yeri olduğunda sistemde beklenen ortalama bekleme süresini bulunuz.

Çözüm: (s.717)